ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 2^{η} ΔΕΚΑΔΑ

11.

Έστω η παράσταση $Α = [(30 : 6) \cdot 2]^2 - [(15 \cdot 5) : 3 + 2^2 \cdot 6] - 3 \cdot (2^5 - 3^3 + 2^1)$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Α

β) Αν Α = 30, **i)** να αναλύσετε τον αριθμό Α σε γινόμενο πρώτων παραγόντων
ii) να εξηγήσετε αν ο Α είναι πρώτος ή σύνθετος αριθμός

Προτεινόμενη λύση

α)

$Α = [(30 : 6) \cdot 2]^2 - [(15 \cdot 5) : 3 + 2^2 \cdot 6] - 3 \cdot (2^5 - 3^3 + 2^1) =$
$= [(30 : 6) \cdot 2]^2 - [(15 \cdot 5) : 3 + 4 \cdot 6] - 3 \cdot (32 - 27 + 2) =$
$= (5 \cdot 2)^2 - (75 : 3 + 24) - 3 \cdot (32 - 27 + 2) =$
$= 10^2 - (25 + 24) - 3 \cdot (32 - 27 + 2) =$
$= 100 - 49 - 3 \cdot 7 = 100 - 49 - 21 = 30$

β)

i) $Α = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

ii) Ο Α είναι σύνθετος δεδομένου ότι εκτός από τον εαυτό του και την μονάδα έχει και άλλους διαιρέτες όπως πχ το 2

12.

α) Πότε δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα;

β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως αληθείς ή ψευδείς:

i) Αν δύο κλάσματα $\frac{α}{β}$ και $\frac{γ}{δ}$ είναι ισοδύναμα , τότε τα γινόμενα αδ και βγ είναι ίσα.

ii) Όταν πολλαπλασιαστούν οι όροι ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό μη μηδενικό αριθμό, προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα.

iii) Η απλοποίηση ενός κλάσματος έχει ως αποτέλεσμα ένα κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό με μικρότερους όρους.

iv) Όταν ένα κλάσμα μπορεί να απλοποιηθεί, λέγεται ανάγωγο.

v) Όταν δύο ή περισσότερα κλάσματα έχουν τον ίδιο αριθμητή, λέγονται ομώνυμα.

Προτεινόμενη λύση

α)

Δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών

β)

Με βάση ορισμούς και ιδιότητες οι απαντήσεις φαίνονται παρακάτω

i) αληθής

ii) αληθής

iii) αληθής

iv) ψευδής

v) ψευδής

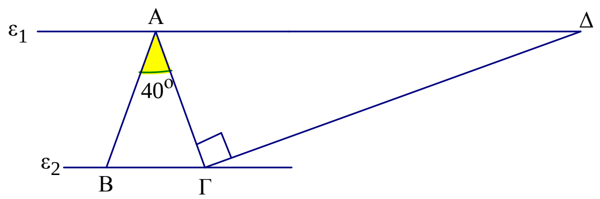
13.

Να σχεδιάσετε δύο παράλληλες ευθείες $(ε_1)$, $(ε_2)$ και πάνω στην $(ε_1)$ να πάρετε ένα τυχαίο σημείο Α. Επίσης πάνω στην $(ε_2)$ να πάρετε τα σημεία Β και Γ έτσι ώστε να είναι ΑΒ = ΑΓ. Από το σημείο Γ να φέρετε μία ημιευθεία κάθετη στην ΑΓ, η οποία τέμνει την ευθεία $(ε_1)$ στο σημείο Δ.

Αν υποθέσουμε ότι $B\hat{A}\Gamma = 40^o$, να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$

Προτεινόμενη λύση

Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει το παρακάτω σχήμα



Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, οι γωνίες $A\hat{B}\Gamma$ και $A\hat{\Gamma}B$ είναι ίσες , έστω ότι $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = \hat{\varphi}$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $40^o + \hat{\varphi} + \hat{\varphi} = 180^o$ άρα

$$2\hat{\varphi} = 180^o - 40^o = 140^o$$

$$\hat{\varphi} = 140^o : 2 = 70^o$$

Δηλαδή $A\hat{B}\Gamma = 70^o = A\hat{\Gamma}B$ **(1)**

Επίσης $A\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{A}\Delta$ ως εντός εναλλάξ, και λόγω της (1) $\Gamma\hat{A}\Delta = 70^o$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ είναι $\Gamma\hat{A}\Delta + \hat{\Delta} = 90^o$ άρα

$$70^o + \hat{\Delta} = 90^o$$

$$\hat{\Delta} = 90^o - 70^o = 20^o$$

14 .

Έστω οι παραστάσεις $A = 3\cdot 2^2 + 15(\,27 - 3^3) - (\,4^2\cdot 1^3) : (16 - 2^3)$ και

$$B = \left(2+\frac{1}{4}\right):\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right) + 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{8} - \left(\frac{3}{2}:3\right)$$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των Α και Β

β) Αν Α = 10 και Β = 5 να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς $\frac{0,8A}{B}$, $\frac{1,8B}{A}$ και 1

Προτεινόμενη λύση

α)

$$A = 3\cdot 2^2 + 15\cdot(\,27 - 3^3) - (\,4^2\cdot 1^3):(16 - 2^3) = 3\cdot 4 + 15\cdot(\,27 - 27) - (\,16\cdot 1):(16 - 8) =$$
$$= 3\cdot 4 + 15\cdot 0 - (\,16\cdot 1) : 8 =$$
$$= 12 + 0 - 16:8 =$$
$$= 12 - 2 = 10$$

$$B = \left(2+\frac{1}{4}\right):\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right) + 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{8} - \left(\frac{3}{2}:3\right) = \left(\frac{8}{4}+\frac{1}{4}\right):\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{6}\right) + 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{8} - \left(\frac{3}{2}:3\right) =$$
$$= \frac{9}{4}:\frac{3}{6} + 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{8} - \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) =$$
$$= \frac{9}{4}\cdot\frac{6}{3} + 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{8} - \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{9}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} + 1 = 4 + 1 = 5$$

β)

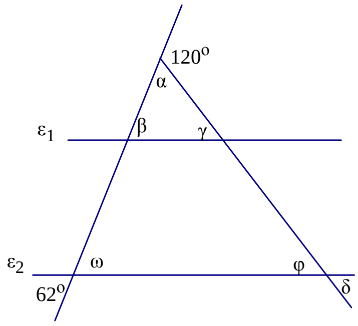
$$\frac{0,8A}{B} = \frac{0,8\cdot 10}{5} = 1,6$$

$\frac{1,8B}{A} = \frac{1,8\cdot 5}{10} = 0,9$ οπότε $0,9 < 1 < 1,6$ δηλαδή $\frac{1,8B}{A} < 1 < \frac{0,8A}{B}$

15.

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$



Προτεινόμενη λύση

Η γωνία $\hat{\alpha}$, ως παραπληρωματική της γωνίας των 120^o, είναι 60^o

Η γωνία $\hat{\omega} = 62^o$ ως κατακορυφήν

Από το σχηματιζόμενο τρίγωνο με γωνίες τις $\hat{\omega}$, $\hat{\alpha}$ και $\hat{\varphi}$

έχουμε ότι $\hat{\omega} + \hat{\alpha} + \hat{\varphi} = 180^o$ άρα $62^o + 60^o + \hat{\varphi} = 180^o$ οπότε

$$\hat{\varphi} = 180^o - 62^o - 60^o = 58^o$$

Τότε και $\hat{\delta} = 58^o$ ως κατακορυφήν της $\hat{\varphi}$

$\hat{\beta} = \hat{\omega} = 62^o$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά

και $\hat{\gamma} = \hat{\varphi} = 58^o$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά .

16.

α) Πότε δύο αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους ; Γράψτε δύο πρώτους μεταξύ τους αριθμούς

β) Στις παρακάτω προτάσεις να συμπληρώσετε τα κενά

i) Ένας αριθμός διαιρείται με το 9 όταν ……

ii) Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 όταν ……….

γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

i) Ο αριθμός 24αβ0 διαιρείτε με το 2

ii) Ο αριθμός 1α34 διαιρείτε με το 4

iii) Η ισότητα $583 = 145 \cdot 4 + 3$ είναι ισότητα Ευκλείδειας διαίρεσης

Προτεινόμενη λύση

α)

Δύο αριθμοί λέγονται πρώτοι μεταξύ τους όταν έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1.

Δύο πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί είναι το 3 και το 5

β)

Συμπληρωμένα τα κενά φαίνονται παρακάτω

i) Ένας αριθμός διαιρείται με το 9 όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9

ii) Ένας αριθμός διαιρείται με το 5 όταν τελειώνει σε 0 ή 5

γ)

Με βάση τους σχετικούς ορισμούς έχουμε

i) Η πρόταση είναι σωστή (Σ) δεδομένου ότι ο αριθμός τελειώνει σε 0, άρα διαιρείται με το 2

ii) Η πρόταση είναι λανθασμένη (Λ) δεδομένου ότι το 34 δεν διαιρείται με το 4

iii) Η πρόταση είναι σωστή (Σ) δεδομένου ότι $3 < 4$ και $3 < 145$, πράγμα που σημαίνει ότι η ισότητα παριστάνει Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο το 583 , διαιρέτη το 145 , πηλίκο το 4 και υπόλοιπο το 3 και Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο το 583 , διαιρέτη το 4 , πηλίκο το 145 και υπόλοιπο το 3

17 .

Ένας μανάβης αγόρασε 400 κιλά φρούτα . Τα $\frac{2}{5}$ αυτών ήταν πορτοκάλια, το 60% των υπολοίπων ήταν μήλα και όλα τα υπόλοιπα ήταν αχλάδια.

α) Να βρείτε πόσα κιλά πορτοκάλια και πόσα κιλά μήλα αγόρασε ο μανάβης.
β) Να βρείτε τι μέρος των φρούτων αντιπροσώπευαν τα αχλάδια
γ) Αν το κιλό τα πορτοκάλια τα είχε αγοράσει 0,4 € και θέλει να κερδίσει 30% από την πώληση τους , πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό και πόσα χρήματα θα εισπράξει από την πώληση των πορτοκαλιών;

Προτεινόμενη λύση

α)

Τα πορτοκάλια είχαν βάρος $\frac{2}{5}\cdot 400 = 160$ κιλά

Τα υπόλοιπα φρούτα έχουν βάρος $400 - 160 = 240$ κιλά, εκ των οποίων τα $\frac{60}{100}\cdot 240 = 144$ κιλά ήταν μήλα.

β)

Τα πορτοκάλια και τα μήλα είχαν βάρος $160 + 144 = 304$.
Επομένως τα αχλάδια είχαν βάρος $400 - 304 = 96$ κιλά.

Η ποσότητα αυτή αντιπροσωπεύει τα $\frac{96}{400} = \frac{24}{100} = 24\%$ τ ου συνόλου των φρούτων.

γ)

Το κέρδος ανά κιλό πώλησης πρέπει να είναι 30% , δηλαδή πρέπει να είναι $\frac{30}{100}\cdot 0{,}4 = 0{,}12$ € .

Οπότε θα πρέπει ο μανάβης να πουλήσει τα πορτοκάλια $0{,}4 + 0{,}12 = 0{,}52$€ το κιλό.
Τότε θα εισπράξει $0{,}52\cdot 160 = 83{,}2$ €

18.

α) Στις παρακάτω προτάσεις να συμπληρώσετε τα κενά

i) Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν όταν έχουν κοινή ….. και οι πλευρές τους είναι …. …. ημιευθείες

ii) Δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή , μία πλευρά κοινή και δεν έχουν άλλα κοινά σημεία ονομάζονται ……….

iii) Οι συμπληρωματικές γωνίες έχουν…… …. 90^o

β) Στον παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε κάθε αριθμό της στήλης Α με ένα γράμμα της στήλης Β έτσι ώστε να προκύπτουν αληθινές προτάσεις.

Στήλη Α : είδος γωνίας	Στήλη Β : μέτρο γωνίας
1. ορθή γωνία	α. 0^o
2. ευθεία γωνία	β. 360^o
3. πλήρης γωνία	γ. μεταξύ 0^o και 90^o
4.αμβλεία γωνία	δ. 180^o
5.οξεία γωνία	ε. 90^o
6. μη κυρτή γωνία	στ. μεταξύ 90^o και 180^o
7. μηδενική γωνία	ζ. μεταξύ 180^o και 360^o

Προτεινόμενη λύση

α)

Συμπληρωμένα τα κενά φαίνονται παρακάτω

i) Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν όταν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες.

ii) Δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή , μία πλευρά κοινή και δεν έχουν άλλα κοινά σημεία ονομάζονται εφεξής

iii) Οι συμπληρωματικές γωνίες έχουν άθροισμα 90^o

β)

Με βάση τους σχετικούς ορισμούς έχουμε τις παρακάτω αντιστοιχίσεις

1→ε , 2→δ 3→β 4→στ 5→γ 6→ζ 7→α

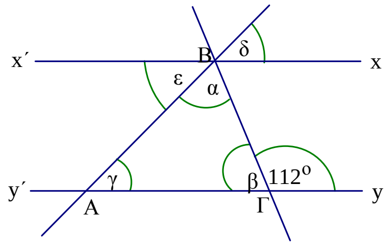
19.

Στο διπλανό σχήμα είναι xx'// yy' και ΑΒ = ΑΓ

i) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$

ii) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\varepsilon}$ και $\hat{\delta}$

iii) Να δικαιολογήσετε γιατί η ΒΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}x$.



Προτεινόμενη λύση

i)

Είναι $\hat{\beta} = 68^o$ ως παραπληρωματική της γωνίας των 112^o.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, είναι $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 68^o$.

Από τη σχέση $\hat{\gamma} + \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^o$ έχουμε $\hat{\gamma} + 68^o + 68^o = 180^o$

$\hat{\gamma} + 136^o = 180^o$

$\hat{\gamma} = 180^o - 136^o = 44^o$

ii)

$\hat{\varepsilon} = \hat{\gamma} = 44^o$ ως εντός εναλλάξ και $\hat{\delta} = \hat{\varepsilon} = 44^o$ ως κατακορυφήν

iii)

Η γωνία $\Gamma\hat{B}x$ είναι ίση με την $\hat{\beta}$ ως εντός εναλλάξ . Άρα $\Gamma\hat{B}x = 68^o$

Αφού $\hat{\alpha} = \Gamma\hat{B}x = 68^o$, η ΒΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}x$

20.

α) Να γράψετε την ισότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης ενός φυσικού αριθμού α με τον φυσικό αριθμό $\beta \neq 0$

β) Πότε λέμε ότι η διαίρεση του φυσικού αριθμού α με τον φυσικό αριθμό β είναι τέλεια ;

γ) Ποιοι αριθμοί ονομάζονται πολλαπλάσια του φυσικού αριθμού α ;

δ) Τι ονομάζουμε μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών;

ε) Τι ονομάζουμε ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών;

Προτεινόμενη λύση

α)

$\alpha = \beta\pi + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < \beta$, όπου α = διαιρετέος , β = διαιρέτης , π = πηλίκο και υ = υπόλοιπο

β)

Η διαίρεση είναι τέλεια όταν το υπόλοιπο είναι 0

γ)

Πολλαπλάσια του φυσικού αριθμού α είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του α με όλους τους φυσικούς αριθμούς.

δ)

Τον μεγαλύτερο από τους κοινούς διαιρέτες τους τον ονομάζουμε ΜΚΔ.

ε)

Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια το ονομάζουμε ΕΚΠ.